Функция Грина для одной задачи кинематической теории дифракции

Колосов С. И.

Физико-математический институт Коми НЦ УрО РАН, Коммунистическая, 24, Сыктывкар, 167982, Россия

e-mail: `kolos@dm.komisc.ru`

Пусть на плоскопараллельную кристаллическую пластину в точке $x = x_0$ падает бесконечно узкий луч, который определим функцией вида $f(x) = \delta(x - x_0)$. В итоге взаимодействия с кристаллом возникнут отраженные лучи. Решение уравнений Такаги в кинематическом приближении для данной задачи есть

$$\mathcal{E}_0(x, z) = e^{a_1 z}\delta(x - x_0 - z),$$
$$\mathcal{E}_h(x, z) = \frac{b_2}{2} e^{\frac{a_1+a_2}{2}(x-x_0)+\frac{a_1-a_2}{2}z}\big[U(x - x_0 - z) - U(x - x_0 + z - 2)\big].$$

Здесь $\mathcal{E}_0$ — проходящая волна, $\mathcal{E}_h$ — дифрагированная волна, $U(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда: $U(x) = 0$, если $x < 0$ и $U(x) = 1$, если $x > 0$. a_1, a_2, b_2 — параметры уравнений Такаги, характеризующие дифракционные свойства кристалла.

Теперь, если на кристалл палает плоская волна, промодулированная произвольной функцией $f(x)$, то для дифрагированной волны имеем решение

$$E_h(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_h(x - \xi, z) f(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{E}_h(x - \xi, z) = \frac{b_2}{2} e^{\frac{a_1+a_2}{2}(x-\xi)+\frac{a_1-a_2}{2}z}\big[U(x - \xi - z) - U(x - \xi + z - 2)\big]$$

играет роль функции Грина для данной задачи.

В качестве примера возьмем модулирующую функцию $f(x)$ следующего вида (гауссова функция)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big).$$

Расчет по формуле (1) даёт

$$E_h(x, z) = \frac{b_2}{4} \exp\Big[\frac{(a_1 + a_2)^2\sigma^2}{8} + \frac{a_1 + a_2}{2}\,x + \frac{a_1 - a_2}{2}\,z\Big] \times$$
$$\times \Big\{\operatorname{erf} \frac{(a_1 + a_2)\,\sigma^2 + 2(x - z)}{2\sqrt{2}\,\sigma} - \operatorname{erf} \frac{(a_1 + a_2)\,\sigma^2 + 2(x + z - 2)}{2\sqrt{2}\,\sigma}\Big\}.$$

Здесь функция $\operatorname{erf} z$ определена как $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-43-110350.